Bilim
Innovatsiya
Barqaror rivojlanish

Oktabr
№10, 2026

AGROBIZNES, FAN VA TEXNOLOGIYALAR

ILMIY-AMALIY
ELEKTRON
JURNALI

Агробизнес, наука и технологии

Agribusiness, science and technology



№ 083688

ISSN:
3060-5245

Toshkent-2026

Platform & workflow by
OJS / PKP

BOSH MUHARRIR
Oblomuradov Narzullo Naimovich – i.f.d. (DSc), professor.
Bosh muharrir o'rinbosarlari:
Islamov Soxib Yaxshibekovich – q.x.f.d. (DSc), professor.
Sultonov Kamoliddin Sadriddinovich – q.x.f.d. (DSc), professor.
Farmonov To'lqin Xayitmurodovich – i.f.d. (DSc), professor.
Muharrir:
Beglayev Uchqun Xurramovich – i.f.f.d. (PhD), dotsent.
Tahrir hay'atining xalqaro a'zolari:
Kusainov Xalel Xaymullayevich – i.f.d. professor (Qozog'iston davlat texnologiya universiteti)
Vilija Aleknevičienė – i.f.d. professor (Universitet Vitovta Velikogo)
Gilbert Ludwig – professor, (Jamk University of Applied Sciences)
Bobojonov Ixtiyor Baxtiyorovich – i.f.d. professor (Germaniyaning Leybnits nomidagi Markaziy Osiyoda qishloq xo'jaligini rivojlantirish instituti (IAMO))
Daiva Makutenene – professor, (Vitautas Magnus universiteti, Litva)
Xaitboyeva Nargiza Alikulovna - i.f.d. dotsent (Tojikiston davlat huquq, biznes va siyosat universiteti)
Tahrir hay'ati:
08.00.00-Iqtisodiyot fanlari:
Gulyamov Saidasror Saidaxmedovich – i.f.d. (DSc), professor;
Saidov Muxammad-Ali Xakimovich – i.f.d. (DSc), professor;
Rustamova Iroda Baxramjanovna – i.f.d. (DSc), professor;
Ochilov Ilhom Sayitqulovich – i.f.d. (DSc), professor;
Askarov Nazimjon Niyozovich – i.f.d. (DSc), professor;
Abdullayev Altinbek Yangibayevich – i.f.d. (DSc), professor;
Boltayev Abror Sayitmuradovich – i.f.d. (DSc), dotsent;
Abduvasikov Abduaziz Abdulazizovich – i.f.n. professor;
Mamadiyarov Dilshad Uralovich – i.f.n. dotsent;
Achilov Mashrab Ulug'bekovich – i.f.f.d. (PhD), dotsent;
Galimova Feryuza Rafikovna – i.f.n. dotsent;
Odilova Dilnozaxon Barnayevna – i.f.f.d. (PhD), dotsent;
Yangiboyev Dilshod G'ulomovich – i.f.f.d. (PhD);
Saidova Dildora Nurmatovna – i.f.n. dotsent;
Dexkanova Nilufar Sagdullayevna – i.f.f.d. (PhD), dotsent;
Roziqov Jahongir Mustaqim o'g'li – i.f.f.d. (PhD), dotsent;
Boltayev Nurali Shiramatovich – i.f.f.d. (PhD), dotsent;
Ibragimova Madina Ismoilovna – i.f.f.d. (PhD), dotsent;
Javliyev Nuriddin Bektemir o'g'li – i.f.f.d. (PhD).

06.00.00-Qishloq xo'jaligi fanlari:
Shokirov Alisher Djuraboyevich – q.x.f.d. (DSc), professor;
Mardanov Husniddin Xolbozorovich – q.x.f.d. (DSc);
Abdiyev Fozil Rashidovich – q.x.f.d. (DSc);
Sattorov Maqsud Axtamovich – q.x.f.d. (DSc);
Yuldashov Nurbek Ergashovich – v.f.d. (DSc);
Xalmirzayev Dilmurad Kamilovich – q.x.f.d. (DSc), dotsent;
Namazov Ixtiyor Choriyevich – q.x.f.d. (DSc), professor;
Xudayqulov Jonibek Bozarovich – q.x.f.d. (DSc), professor;
Eshonqulov Jamoliddin Saporboy o'g'li – q.x.f.d. (DSc), professor;
Abdullayev Anvar Kodirullayevich – b.f.n., katta ilmiy xodim;
Atabayev Ma'ruf Maxmudovich – q.x.f.n. professor;
Safarov Asqar Asadullayevich – q.x.f.f.d. (PhD), dotsent;
Mustafakulov Davron Mamatqulovich – q.x.f.f.d. (PhD), dotsent;
Kasimov Botir Sadriddinovich – q.x.f.f.d. (PhD);
Akramov Umidilla Ikramdjanovich – q.x.f.n. dotsent;
Elboboyev Abdug'ani Shuxrat o'g'li – q.x.f.f.d. (PhD);
Muxammadov Yo'ldoshbek Akmal o'g'li – q.x.f.f.d. (PhD);
Maxmudova Shaxnoza Abdufattaxovna – q.x.f.f.d. (PhD), dotsent;
Idrisov Xusanjon Abdujabborovich – q.x.f.f.d. (PhD), dotsent.

MUASSIS
Toshkent davlat agrar universiteti

ALOQA UCHUN MA'LUMOTLAR
Manzil: Toshkent viloyati, Qibray tumani, Universitet ko'chasi, 2-uy.
Jurnalning telegram manzili:
t.me/agrobiznes_elektronjurnal
E-mail: licht-1989@mail.ru
Jurnalning rasmiy sayti:
https://www.agrobiznesjournal.uz
Tel: +(998) 93 439 30 00

JURNALNING ILMIYLIGI:

Ma'lumot uchun, OAK Rayosatining 30.11.2024-yildagi №364/5-sonli qarori bilan 08.00.00-Iqtisodiyot fanlari bo'yicha, 08.05.2025-yildagi №370/5-sonli qarori bilan 06.00.00-Qishloq xo'jaligi fanlari bo'yicha "Dissertatsiyalar asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan milliy ilmiy nashrlar ro'yxati"ga kiritilgan.

Elektron nashr, 1107 sahifa.
2026-yil, №10. oktabr.

Jurnal har oyda bir marotaba elektron shaklda jurnalning rasmiy sayti orqali nashr etiladi.

MUNDARIJA

IQTISODIYOT FANLARI

KONSTANTIN IVANOVICH KURPAYANIDI
Green energy transition in Central Asia: capacity growth, technological diversification and system constraints.....11
TURSUNKULOVA GULCHIROY BURXONOVNA
Meva-sabzavotchilik korxonalarida biologik aktivlarni hisobga olishni xalqaro standartlar asosida takomillashtirish.....24
MO‘MINOV ABDUVALI AKBARALIEVICH, DJO‘RAEV MUQIMJON YAQUBJONOVICH
Tritikale seleksiyasida molekulyar markerlardan foydalanishning iqtisodiy samaradorligi: QTL, SSR, SNP va KASP yondashuvlari asosida.....30
KARIMOV NURBEK DEXKANOVICH
Yeryong‘oq yetishtirishda oqqanotga qarshi kimyoviy himoya tadbirlarining iqtisodiy samaradorligini baholash.....43
SAYIPOV BEGZOD RAHIMOVICH
Valyuta kursi tebranishlari indeksini hisoblash va baholash.....53
KARIMOV NURBEK DEXKANOVICH
Yeryong‘oq ekinlarida o‘rgimchak kanaga qarshi kimyoviy kurash choralarining iqtisodiy samaradorligini baholash.....63
SHOMURODOV TOHIR BOYMUROD O‘G‘LI
Oziq-ovqat xavfsizligini ta’minlashda aholi daromadlarining o‘rni haqidagi nazariy yondashuvlar.....73
МУСТАФОКУЛОВА ЗАРИФА
Сравнительный анализ лидерства в условиях кризиса и роль молодых лидеров в развитии.....80
BOZOROVA MUHABBAT TOXTAYEVNA
Korxonalarda davr xarajatlarining iqtisodiy mohiyati, mazmuni va tasnifi.....87
RAXIMJONOVA SHOHSANAM BAXODIROVNA
Davlat-xususiy sheriklik asosida ijtimoiy soha infratuzilmasini rivojlantirishda "Value for Money" (VfM) baholash mexanizmini takomillashtirish.....95
QURBANOVA OYDIN TO‘LQIN QIZI
Ishlab chiqarish korxonalari raqobatbardoshligini baholashning integral ko‘rsatkichini shakllantirish.....101
SADIKOVA SHOHIDA OBIDQUL QIZI
O‘zbekistonda piyoz yetishtirishning iqtisodiy o‘rni va samaradorligi.....108
XAKIMOV RASHID
Oziq-ovqat xavfsizligini mustahkamlashda sun’iy intellekt va raqamli texnologiyalarning o‘rni va samaradorligi.....119
TOJIMATOV IZZATBEK IKROMALI O‘G‘LI
Don mahsulotlari ishlab chiqarish korxonalarida intellektual marketing strategiyasini boshqarish mexanizmlarini takomillashtirish.....133
SODIQOVA GAVHAR XAYRULLA QIZI
Xodimlarni boshqarishda raqamli texnologiyalardan foydalanish samaradorligi.....142
ERGASHEV ASADBEK ULUG‘BEK O‘G‘LI, TURSUNOV G‘IYOS SUNNAT O‘G‘LI
Meva-sabzavotlarni qayta ishlashda hosil bo‘ladigan ikkilamchi resurslarni biotexnologik qayta ishlash va ulardan samarali foydalanish.....148

RASULOV XAMIDJON YAKUBOVICH
Raqamli texnologiyalar va CRM tizimlarining kichik biznesdagi o‘rni.....155
BOZOROVA MUHABBAT TOXTAYEVNA
Korxonalarda davr xarajatlarini buxgalteriya hisobini tashkil etish va uning tahlili.....168
YULDASHOV ABDUMALIK ILXOMOVICH
Ekoturizmning hududiy iqtisodiy rivojlanishga ta’sirini ekonometrik baholash.....185
YULDASHOV ABDUMALIK ILXOMOVICH
Ekoturizmning hududiy iqtisodiy rivojlanishdagi rolini baholashning nazariy-metodologik asoslari.....192
MUHAMMADIEV NAUFALBEK AZIZXON O‘G‘LI
Elektron tijoratda sun’iy intellektdan foydalanishning kichik biznes savdo hajmiga ta’siri.....202
АБДУЛЛАЕВ АКМАЛЖОН АБДУЖАЛИЛОВИЧ
Процедура нормирования частных показателей при оценке ресурсного потенциала аграрного сектора: сравнительный анализ методов и обоснование выбора.....210
XASANOVA RUXSORA RASULJON QIZI
O‘zbekistonda elektron tijoratni rivojlantirishning hududiy xususiyatlari va iqtisodiy samaradorligini oshirish.....223
UMAROVA XUSNORA DILMUROD QIZI
Orolbo‘yi mintaqasida xizmat ko‘rsatish korxonalarini moslashuvchan (adaptiv) boshqarishning ma’lumotlarga asoslangan modelini takomillashtirish.....229
АБДУЛЛАЕВ АКМАЛЖОН АБДУЖАЛИЛОВИЧ, ХОЛБЕКОВ ЖУРЪАТ АБДИНАБИЕВИЧ
Теоретико-методологические основы оценки ресурсного потенциала аграрного сектора: концептуальный подход и методика интегральной оценки.....234
UMARALIYEV DIYORBEK SHUKIRALI O‘G‘LI
Tomchilatib sug‘orish texnologiyasini joriy etishning fermer xo‘jaliklari xarajat va daromadlariga ta’siri: subsidiya samaradorligining iqtisodiy bahosi (2019–2025 yillar).....247
MIRAXMEDOVA KAMOLA
O‘zbekistonda turizm korxonalarini strategik boshqarish mexanizmlarini takomillashtirish.....254
RAVSHANOVA ORZIGUL INOYAT QIZI
O‘zbekistonning xalqaro soliq tizimiga integratsiyasi: BEPS minimum standartlari va ularning milliy soliq siyosatidagi ahamiyati.....261
IRGASHEV ABBOS JUMANAZAROVICH
Anor yetishtirish va sotish qiymat zanjirida ishtirokchilarning daromadlari ulushini iqtisodiy baholash.....274
BAXADIR ADILCHAEV
Agroturizm qishloq iqtisodiyotini diversifikatsiya qilish va hududlarning barqaror rivojlanish vositasi sifatida.....283
XO‘JAMOVA LATOFAT ASADULLAEVNA
Yashil iqtisodiyot sharoitida agrobiznesda innovatsion jarayonlarni boshqarishning o‘ziga xos xususiyatlari.....290
BOZOROV BOBUR HAQBERDIYEVICH
Qurilishni moliyalashtirish samaradorligiga narx omillarining ta’sirini ekonometrik baholash.....297
RAVSHANOVA ORZIGUL INOYAT QIZI
Chegaralararo soliq munosabatlari: muammolar va rivojlanish istiqbollari.....307

KILICHEV ALISHER AKRAMOVICH
O‘zbekiston kimyo sanoati aksiyadorlik jamiyatlarida mavsumiylikning moliyaviy barqarorlikka ta’siri: panel tahlil (2018–2026-yillar)……322
IRGASHEV ABBOS JUMANAZAROVICH
Surxondaryo viloyatida anor ishlab chiqarish va sotish samaradorligini oshirish imkoniyatlari……331
ЛЯМКИНА ВИКТОРИЯ АЛЕКСАНДРОВНА, НАБИЕВА АНОРГУЛ МУХАМЕТКАЗИЕВНА
Механизмы трансформации и управления предпринимательским университетом в условиях цифровой экономики……338
YUSUFALIYEV OLIMJON ABDURAXMONOVICH
Aholi farovonligini oshirishda tadbirkorlik faoliyati samaradorligini baholash metodologiyasini takomillashtirish……347
SAYITQULOV JAHONGIR ILHOMOVICH
Tijorat banklarida raqamli bank xizmatlarini takomillashtirish istiqbollari……358
KILICHEV ALISHER AKRAMOVICH
Mavsumiy moliyaviy siklni identifikatsiyalash va moliyaviy barqarorlikning mavsumiy tuzatilgan ko‘rsatkichlari (mineral o‘g‘itlar ishlab chiqaruvchi korxona misolida)……365
QODIROV ZOHIDJON ERALIEVICH
Suv resurslarini boshqarishning iqtisodiy mohiyati va tamoyillari……373
ZAFAR QODIROV ABDIVAXOBOVICH
Long-term asset valuation and accounting in Uzbekistan: a comparative analysis of national accounting standards……381
SHAVQIDINOVA DILNAVOZ
AQSH va Yevropa ittifoqi mamlakatlari organik meva-sabzavotlar sertifikatlaridagi farqlar……389
KUBAYEV DJASUR ABDUMUMINOVICH
Iqtisodiyotni raqamlashtirishda yer resurslaridan foydalanish samaradorligini oshirish omillari……395
IBODILLAYEV HABIBULLA ABDULLAYEVICH
Madaniy meros obyektlarida turizm tadbirkorligini rivojlantirish orqali aholi bandligini ta’minlash yo‘llari……401
SHAVQIDINOVA DILNAVOZ
IFOAM – organics international: organik standartlar, sertifikatlash, organik bozor va siyosat bo‘yicha statistik tahlili……407
MAYLIYEVA SADOQAT SAFAYOZOVNA
Mintaqada tadbirkorlik salohiyatidan samarali foydalanishning ustuvor yo‘nalishlari (Xorazm viloyati misolida)……413
SHIRINOV UCHQUN ABDUXALILOVICH
MHXS talablari asosida tashqi segmentar hisobotni shakllantirish metodikasi..421
ABDINAZAROV XUSAN SHAYMANOVICH, NORQOBILOVA FERUZA ABDUXOMIDOVNA
Klasterlash va infratuzilma o‘rtasidagi bog‘liqlikni ekonometrik modellashtirish……430
SA’DULLAYEVA SAYYORA NASILLO QIZI
Neft-gaz sanoati korxonalarida moddiy xarajatlarning kompleks tahlili……439
ABDINAZAROV XUSAN SHAYMANOVICH, NORQOBILOVA FERUZA ABDUXOMIDOVNA
Klasterlashni rivojlantirishning tashkiliy mexanizmlari……447

SATTAROV SHUXRAT XASANOVICH
O‘zbekistonda xizmatlar sohasining rivojlanishi va diversifikatsiya tendensiyalari.....458
KAMALKARIEVA NILUFAR XALIKBEKOVNA
Qurilish materiallari korxonalarida yangi mahsulotlarni o‘zlashtirish va sifatni oshirishning iqtisodiy samaradorligini baholash.....467
СЕЙТНАЗАРОВ БАХАДИР МУРАТБАЕВИЧ
Экономическая оценка устойчивого развития аграрного сектора в условиях дефицита водных ресурсов (на примере Республики Каракалпакстан).....475
TURDIYEV ULUG‘BEK QAYUMOVICH
Sanoat o‘sishining uzoq muddatli rivojlanish tendensiyalarini aniqlash.....484
OBLOQULOV ABDURAUF OLIMJON O‘G‘LI
Institutsional iqtisodiyot va iqtisodiy o‘sish: rasmiy va norasmiy institutlarning roli.....493
JUMANAZAROV KODIRJON SALYAYEVICH
Sanoat korxonalarida raqamli strategiyani shakllantirishning metodologik yondashuvlari.....501
NARMAMATOV IXTIYAR BAXTIYAROVICH, SHERMATOVA NARGIZA ZAFAR QIZI
Zamonaviy bozor sharoitida xizmat ko‘rsatish sohasi subyektlarining iqtisodiy barqarorligini ta’minlash strategiyalari.....512
ALIYEV AZIM TOLIB O‘G‘LI
Aksiyadorlik jamiyatlari faoliyatini boshqarish usullari va uslublarini takomillashtirish: nazariy-amaliy tahlil va modellashtirish.....518
ABDULLAYEVA AZIZA MURAT QIZI
Ipoteka kreditlashning nazariy asoslari va xorijiy modellari: AQSH, Germaniya, Qozog‘iston va Malayziya tajribasi.....528
YUNUSOV BEGENCH MAVLANBERDIEVICH, MINASIPOV BURXAN BAXTIYOROVICH
Suv xo‘jaligi infratuzilmasidan samarali foydalanish — iqtisodiy barqarorlikning muhim omili.....539
АЙТБАЕВА ГУЛЬЗАДА КУАНЫШБАЕВНА
Эффективные механизмы государственно-частного партнерства в сфере услуг.....546
SADIQOV ZAFARBEK ADILBEKOVICH
Banklarda likvidlik ko‘rsatkichlarini buxgalteriya hisobi ma’lumotlari asosida tahlil qilish.....554
ODILOVA DILNOZA BARNAYEVNA
Milliy iqtisodiyot raqobatbardoshligini oshirishda intellektual kapitalning ko‘p omilli ta’sir mexanizmini takomillashtirish.....563
IBODULLAYEV DOSTON SOBIRJON O‘G‘LI, DJURAYEV BEKZOD BEKMATOVICH
Sutchilik fermer xo‘jaliklarini davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash mexanizmini takomillashtirish va ozuqa bazasini rivojlantirish istiqbollari.....574
QULMATOV CHORI ANOROVICH
Korxonalar moliyasini nazorat qilishning uslubiy asoslari.....582
YAKUPOVA AYZADA NIZAMATDINOVNA
Agrar sohada barqaror rivojlanish mexanizmlarining xorijiy tajribasi va uni O‘zbekiston sharoitiga moslashtirish.....590
XUDAYBERGANOV ZOXIDJON DJURAKULOVICH
Xizmat sohasida raqobatbardoshlik nazariyalari evolyutsiyasi va ularning raqamli iqtisodiyotdagi talqini.....602
XONTO‘RAYEV IBROXIM ABDIKAMOL O‘G‘LI
Oliy ta’limda sun’iy intellekt asosidagi intellektual axborot tizimlaridan foydalanish.....613

ATANIYAZOVA MAKSUDA BALTABAYEVNA
Zamonaviy texnologiyalar va innovatsiyalar davrida davlat-xususiy sheriklikning mohiyati.....622
KARIMOV JAMSHID NIZOMIDDIN O‘G‘LI
Mamlakatimiz kichik sanoat zonalarini rivojlantirishda xorij tajribasidan foydalanish imkoniyatlari.....633
JUMABOYEV DILMUROD ABDIFATTO O‘G‘LI
Quyosh va shamol elektr stansiyalari samaradorligini uch qatlamda baholash.....641
BO‘RIBAYEVA QUNDIZ MURATBAYEVNA
O‘zbekistonda fermer xo‘jaliklari mahsulotlari hajmini prognozlash: TREND modeli yondashuvi.....649
ATANIYAZOVA MAKSUDA BALTABAYEVNA
Davlat iqtisodiyotining rivojlanish evolyutsiyasida davlat-xususiy sheriklikning o‘rni va ahamiyati.....657
КЕНДЖАЕВА ДИЛДОРА ХУДАЙБЕРГАНОВНА
Объяснимый искусственный интеллект (XAI): обеспечение прозрачности и доверия пользователей в образовательных решениях — концептуальная модель.....666
IBRAGIMOV SIROJIDDIN BAXODIROVICH
Davlat ishtirokidagi real sektor korxonalarining moliyaviy holatini yuksaltirishga salbiy ta’sir etuvchi omillar, ularni bartaraf etish va moliyaviy resurslardan samarali foydalanish mexanizmlari.....676
AHMEDOV SHOHJAHON
ROPO (onlayn o‘rganib, oflayn xarid qilish) effektini hisobga olgan chakana savdo marketing strategiyasini shakllantirishning metodologik asoslari.....684
ЖУМАНИЯЗОВА ДУРДОНА
Юқори тартибли операторли тенгламалар ечимларининг умумлаштирилган ХАРТОГС қаторларига ёйилмаси.....694
ISAHANOV MUSLIMJON MARIFJON O‘G‘LI
Tuproq unumdorligini oshirishni iqtisodiy rag‘batlantirishda agroekologik to‘lovlar va eko-sxemalarning ahamiyati: Yevropa ittifoqi tajribasi.....705
DEXKANOVA SHAXLOXON SAGDIYEVNA
Sabzavotchilikda biologik aktivlarni baholash va moliyaviy natijani shakllantirishni 41-son BHXS ga muvofiq takomillashtirish.....710
КАДЫРОВ АБДУКАДЫР АМАНОВИЧ
Обеспечение экономической безопасности системы корпоративного управления акционерных компаний Республики Узбекистан.....715
XUDAYAROV OYBEK ODILOVICH
Tijorat banklari biznes modellarini transformatsiya qilishda raqamli bank xizmatlarining o‘rni.....724
XUJANOV ELBEK
Oliy ta’limda LMS asosida talabalar davomati va o‘zlashtirishini monitoring qilish: amaliy yondashuv.....731
MUXAMMADSIDIQOV OTABEK DILSHODBEK O‘G‘LI
Kichik biznesda inqiroz xavfini aniqlashning moliyaviy diagnostika usullari.....740
KADIROV SAXOBIDDIN SHAROFOVICH
Investitsiyalar hisobida xalqaro standartlardan foydalanish.....748
ISAKHANOV MUSLIMJON MARIFJON UGLI
Mechanisms for economic incentives for cultivating cover crops to increase soil fertility: US experience.....754

2026-yil, oktabr.
№10-son.
ISSN: 3060-5245

ЮҚОРИ ТАРТИБЛИ ОПЕРАТОРЛИ ТЕНГЛАМАЛАР ЕЧИМЛАРИНИНГ УМУМЛАШТИРИЛГАН ХАРТОГС ҚАТОРЛАРИГА ЁЙИЛМАСИ

ЖУМАНИЯЗОВА ДУРДОНА
Тошкент иқтисодиёт ва технологиялари университети
Иқтисодиёт кафедраси ўқитувчиси
E-mail: durdonajumaniyazova516@gmail.com
https://orcid.org/0009-0004-1499-7785

Аннотация. Мақолада LM-ML=I коммутацион муносабатни қаноатлантирувчи чизиқли операторлар жуфтлиги учун юқори тартибли $L^m u=0$ операторли тенгламанинг ечимлари ўрганилади. Бундай ечимлар учун Альманси типидаги ягона ёйилма исботланиб, унинг компонентлари учун ошкор формула олинган. Ушбу натижа асосида бир ўзгарувчи бўйича полианалитик, иккинчи ўзгарувчи бўйича голоморф бўлган функциялар коэффициентлари полианалитик бўлган умумлаштирилган Хартогс қаторларига ёйилади. Бундай қаторларнинг коэффициентлари голоморф бўлмагани сабабли классик Хартогс леммасини уларга бевосита қўллаб бўлмайди; шу боис яқинлашиш соҳаси компонентлар орқали аниқланади. Яқинлашиш радиусини ифодаловчи функциянинг юқоридан регуляризацияси субгармоник экани, яқинлашиш соҳаси псевдоботиқ Хартогс соҳаси бўлиши ва функция ушбу соҳага давом эттирилиши исботланган. Натижалар ошкор мисол ва чизмалар билан кўрсатилган.
Калит сўзлар: Хартогс қатори, полианалитик функция, Альманси ёйилмаси, операторли тенглама, Вейль муносабати, субгармоник функция, псевдоботиқ соҳа, голоморф давом эттириш.

Аннотация. В статье изучаются решения операторного уравнения высокого порядка $L^m u = 0$ для пары линейных операторов, удовлетворяющих коммутационному соотношению LM – ML = I. Для таких решений доказано единственное разложение типа Альманси и получена явная формула для его компонент. На этой основе функции, полианалитические по одной переменной и голоморфные по другой, разлагаются в обобщённые ряды Хартогса с полианалитическими коэффициентами. Поскольку коэффициенты таких рядов не являются голоморфными, классическая лемма Хартогса к ним непосредственно неприменима, и поэтому область сходимости определяется через компоненты. Доказано, что регуляризация сверху функции, описывающей радиус сходимости, субгармонична, область сходимости является псевдовыпуклой областью Хартогса, а функция продолжается в эту область. Результаты проиллюстрированы явным примером и рисунками.
Ключевые слова: ряд Хартогса, полианалитическая функция, разложение Альманси, операторное уравнение, соотношение Вейля, субгармоническая функция, псевдовыпуклая область, голоморфное продолжение.

Abstract. The paper studies solutions of the higher-order operator equation $L^m u=0$ for a pair of linear operators satisfying the commutation relation LM-ML=I. A unique Almansi-type decomposition is proved for such solutions, with an explicit formula for its components. On this basis, functions that are polyanalytic in one variable and holomorphic in another are expanded into generalized Hartogs series with polyanalytic coefficients. Since the coefficients are not holomorphic, the classical Hartogs lemma cannot be applied directly, and the domain of convergence is therefore determined through the components. It is proved that the upper regularization of the function describing the radius of convergence is subharmonic, that the domain of convergence is a pseudoconvex Hartogs domain, and that the function extends to this domain. The results are illustrated by an explicit example and figures.
Keywords: Hartogs series, polyanalytic function, Almansi decomposition, operator equation, Weyl relation, subharmonic function, pseudoconvex domain, holomorphic extension.

КИРИШ

Хартогс қаторлари кўп ўзгарувчили комплекс анализнинг асосий воситаларидан бири ҳисобланади. Ф.Хартогс ўзининг 1906 йилдаги асосий ишида [1] $D\times\{|w|<r\}$ соҳада голоморф функцияни битта ўзгарувчининг даражалари бўйича

$$u(z,w)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z)\,w^k \qquad (1)$$

қаторга ёйиб, унинг яқинлашиш соҳасини ўрганган. Бу ерда $c_k(z)$ коэффициентлар D соҳада голоморф функциялардир. z нуқтадаги яқинлашиш радиуси

$$R(z)=\left(\limsup_{k\to\infty}|c_k(z)|^{1/k}\right)^{-1} \qquad (2)$$

формула билан аниқланади. Хартогснинг асосий кузатуви шундан иборатки, $-\log R$ функциянинг юқоридан регуляризацияси плюрисубгармоник бўлади; бу эса Хартогс қаторининг яқинлашиш соҳаси псевдоботиқ эканини англатади. Ушбу кузатув кейинчалик псевдоботиқлик назарияси ва Леви муаммосининг ечимига асос бўлди[8;10].

Анализнинг бошқа йўналишида юқори тартибли тенгламалар ечимларининг тузилиши ўрганилган. Э.Альманси 1899 йилда полигармоник функцияларни гармоник функциялар орқали ифодалаш формуласини топган [2], М.Б.Балк эса полианалитик функциялар учун $u=\Sigma\,\bar{z}^j h_j$ кўринишидаги ёйилмани тизимли ўрганган [4]. Иккала натижа ҳам умумий схемага бўйсунади: $L^m u=0$ тенгламанинг ечими L операторнинг ядросидан олинган функциялар ва махсус «кўпайтирувчи» оператор орқали ифодаланади.

Бу схема операторлар назарияси тилида бир неча йўналишда ривожлантирилган. А.О.Гельфонд ва А.Ф.Леонтьев умумлашган дифференциаллаш операторини киритиб, унга мос умумлашган Тейлор қаторларини ўрганганлар [7]. Д.Пшеворска-Роловичнинг алгебраик анализида ўнгдан тескариланувчи операторлар учун Тейлор формуласи абстракт кўринишда олинган [5], В.В.Карачик эса Лаплас операторига нисбатан нормаланган функциялар системасини қуриб, унинг татбиқларини кўрсатган [6].

Мазкур мақоланинг тадқиқот муаммоси ушбу икки йўналишнинг туташ нуқтасида жойлашган. Агар $u(z,w)$ функция z бўйича юқори тартибли операторли тенгламани қаноатлантирса ва w бўйича голоморф бўлса, у ҳолда унинг w бўйича Хартогс қатори коэффициентлари голоморф бўлмайди. Масалан, иккинчи тартибли полианалитик $1-|z|^2=1-z\bar{z}$ функция учун $\log|1-|z|^2|$ функция $z=0$ нуқтада локал максимумга эришади, демак субгармоник эмас. Шу сабабли классик Хартогс леммасини бундай қаторларга бевосита қўллаб бўлмайди ва уларнинг яқинлашиш соҳасини аниқлаш алоҳида масалага айланади.

Тадқиқотнинг мақсади – LM-ML=I муносабатни қаноатлантирувчи операторлар учун $L^m u$=0 тенглама ечимларининг умумлаштирилган Хартогс қаторларига ёйилмасини қуриш ва бундай қаторларнинг яқинлашиш соҳасини тавсифлашдан иборат. Бунинг учун қуйидаги вазифалар ҳал қилинади: абстракт Альманси типидаги ёйилмани исботлаш ва унинг компонентлари учун ошкор формула олиш; полианалитик-голоморф функцияларни умумлаштирилган Хартогс қаторига ёйиш; яқинлашиш соҳасининг псевдоботиқлигини ва функциянинг ушбу соҳага давом эттирилишини исботлаш.

Ишнинг илмий янгилиги шундаки, унда Альманси типидаги ёйилма фақат Вейль муносабатига таянган ҳолда ягона алгебраик схемада исботланган ва шу асосда коэффициентлари голоморф бўлмаган Хартогс қаторлари учун яқинлашиш соҳасини тавсифлаш усули таклиф этилган.

МАВЗУГА ОИД АДАБИЁТЛАР ТАҲЛИЛИ

Хартогс қаторлари назарияси Ф.Хартогснинг [1] ишидан бошланади. Унда яқинлашиш радиусининг логарифми билан боғлиқ функциянинг плюрисубгармониклиги ва алоҳида голоморф функцияларнинг биргаликда голоморфлиги ҳақидаги машҳур теорема исботланган. Бу натижаларнинг замонавий баёни Б.В.Шабат [8], В.С.Владимиров [9] ва Л.Хёрмандер [10] монографияларида келтирилган. Алоҳида аналитик функциялар назариясининг кейинги ривожи М.Ярницкий ва П.Пфлюгнинг монографиясида умумлаштирилган [14].

Плюрипотенциал назария доирасида Хартогс қаторлари ва уларнинг давом эттирилиши масалалари ўзбек математика мактабида фаол ўрганилган. А.Садуллаевнинг плюрисубгармоник ўлчовлар ва сиғимларга бағишланган шарҳ мақоласи [12] бу соҳанинг асосий манбаларидан бири бўлиб, унда плюрисубгармоник функцияларнинг экстремал хоссалари тизимли баён этилган. А.Садуллаев ва С.А.Имомқулов параллел кесимларда нозик махсусликларга эга бўлган голоморф ва плюригармоник функцияларни давом эттириш масаласини ҳал қилганлар [13]. Плюрипотенциал назариянинг умумий баёни М.Климек [11] ва А.Садуллаев[16] монографияларида берилган.

Юқори тартибли тенгламалар бўйича классик натижа Э.Альманси теоремасидир [2]: $\Delta^m u$=0 тенгламанинг ҳар қандай ечими u=$\Sigma_{j<m}|x|^{2j}h_j$ кўринишда ифодаланади, бунда h_j – гармоник функциялар. Н.Ароншайн ва ҳаммуаллифларининг монографиясида бу натижа полигармоник функциялар назарияси доирасида ривожлантирилган [3]. Полианалитик функциялар учун ўхшаш ёйилма М.Б.Балк томонидан тизимли ўрганилган[4].

Операторли ёндашув доирасида А.О.Гельфонд ва А.Ф.Леонтьев умумлашган дифференциаллаш оператори ва унга мос қаторларни киритганлар [7], Д.Пшеворска-Ролевич эса ўнгдан тескариланувчи операторлар учун Тейлор–Гончаров формуласини абстракт шаклда олган

2026-yil, oktabr.
№10-son.
ISSN: 3060-5245

[5]. В.В.Карачик Лаплас операторига нисбатан нормаланган системалар ёрдамида полигармоник тенгламалар учун ошкор формулалар топган [6].

Адабиётлар таҳлили шуни кўрсатадики, Хартогс қаторлари назарияси голоморф коэффициентлар учун тўлиқ ишлаб чиқилган, юқори тартибли операторли тенгламалар ечимларининг тузилиши ҳам алоҳида ўрганилган. Бироқ коэффициентлари юқори тартибли тенглама ечимлари бўлган Хартогс қаторларининг яқинлашиш соҳасини тавсифлаш масаласи етарли даражада ёритилмаган.

ТАДҚИҚОТ МЕТОДОЛОГИЯСИ

Тадқиқотда алгебраик анализ усуллари (коммутатор айниятлари), плюрипотенциал назария воситалари (Хартогс леммаси, юқоридан регуляризация) ва Хартогснинг алоҳида голоморфлик ҳақидаги теоремаси қўлланилади.

1-таъриф. X чизиқли фазода аниқланган $L,M:X\to X$ чизиқли операторлар жуфтлиги, агар

$$LM-ML=I \tag{3}$$

тенглик бажарилса, Вейль жуфтлиги дейилади, бунда I – бирлик оператор.

Бу муносабат квант механикасидаги каноник коммутацион муносабатнинг алгебраик аналогидир. Энг содда мисол – $X=C^{\infty}$(mathbb{R}) фазода $L=d/dx$ ва $M=x$ операторлари. Асосий мисол сифатида $L=\partial/$partial$\bar{z}$ ва $M=\bar{z}$ операторларини оламиз: ҳақиқатан, ихтиёрий силлиқ f учун $\partial(\bar{z}f)/$partial$\bar{z}-\bar{z}\,\partial f/$partial$\bar{z}=f$.

Биз

$$L^m u=0 \tag{4}$$

кўринишидаги тенгламани ўрганамиз ва уни m-тартибли операторли тенглама деб атаймиз. $L=\partial/$partial$\bar{z}$ ҳолда (4) тенгламанинг ечимлари m-тартибли полианалитик функциялардир.

Белгилашлар: $D\subset\mathbb{C}$ – соҳа, $\Delta_r=\{w\in\mathbb{C}:|w|<r\}$; $v^*(z)=lim\ sup_{zeta\to z}v(zeta)$ – v функциянинг юқоридан регуляризацияси; $PSH(D)$ – D даги плюрисубгармоник (бир ўлчовли ҳолда субгармоник) функциялар синфи. D устидаги тўлиқ Хартогс соҳаси деб $\{(z,w):z\in D,\ |w|<\rho(z)\}$ кўринишидаги соҳага айтилади.

Исботларда қуйидаги маълум тасдиқдан фойдаланилади.

Хартогс леммаси [10; 11]. *$\Omega\subset\mathbb{C}^n$ соҳада u_k плюрисубгармоник функциялар кетма-кетлиги локал текис юқоридан чегараланган ва ҳар бир $z\in\Omega$ да $lim\ sup_k\ u_k(z)\le C$ бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $K\subset\Omega$ компакт ва $\varepsilon>0$ учун шундай k_0 топиладики, $k\ge k_0$ да $\sup_K u_k\le C+\varepsilon$ бўлади. Бундан ташқари, $(lim\ sup_k\ u_k)^*$ функция плюрисубгармоник ёки айнан $-\infty$ га тенг.*

2-таъриф. Коэффициентлари m-тартибли полианалитик функциялардан иборат бўлган $\Sigma_k\ c_k(z)w^k$ қаторни m-тартибли

2026-yil, oktabr.
№10-son.
ISSN: 3060-5245

умумлаштирилган Хартогс қатори деб атаймиз. Агар $c_k(z)=\Sigma_{j<m}\bar{z}^j a_{jk}(z)$ бўлса, $(a_{0k},\dots,a_{m-1,k})$ функцияларни қаторнинг голоморф компонентлари деймиз.

ТАҲЛИЛ ВА НАТИЖАЛАР

1-лемма. (L,M) – *Вейль жуфтлиги бўлсин. У ҳолда ихтиёрий* $j\geq 1$ *учун*

$$[L,M^j]=LM^j-M^jL=jM^{j-1},\qquad j\geq 1 \tag{5}$$

айният ўринли. Агар $h\in\ker L$ бўлса, у ҳолда

$$L^kM^jh=\frac{j!}{(j-k)!}M^{j-k}h\ \ (k\leq j),\qquad L^kM^jh=0\ \ (k>j) \tag{6}$$

Исбот. (5) айният j бўйича индукция билан исботланади: $j=1$ да у (3) нинг ўзи. Агар у j учун ўринли бўлса, $LM^{j+1}-M^{j+1}L=(LM^j-M^jL)M+M^j(LM-ML)=jM^j+M^j=(j+1)M^j$. (6) ни исботлаш учун $h\in\ker L$ эканидан $LM^jh=jM^{j-1}h$ ни оламиз ва уни k марта кетма-кет қўллаймиз.

1-теорема (Альманси типидаги ёйилма). (L,M) – *Вейль жуфтлиги ва* $u\in X$ *функция (4) тенгламани қаноатлантирсин. У ҳолда и ягона усулда*

$$u=\sum_{j=0}^{m-1}M^jh_j,\qquad Lh_j=0 \tag{7}$$

кўринишда ифодаланади, бунда компонентлар қуйидаги ошкор формула билан аниқланади:

$$h_j=\frac{1}{j!}\sum_{s=0}^{m-1-j}\frac{(-1)^s}{s!}M^sL^{j+s}u \tag{8}$$

Исбот. $T=\Sigma_{s=0}^{m-1}(-1)^s/s!M^sL^s$ операторни киритамиз. Аввал $L^pu=0$ $(p\geq m)$ бўлган ҳар қандай u учун $LTu=0$ эканини кўрсатамиз. (5) айниятдан $LM^s=M^sL+sM^{s-1}$ бўлгани учун

$$LTu=\sum_{s=0}^{m-1}\frac{(-1)^s}{s!}M^sL^{s+1}u+\sum_{t=0}^{m-2}\frac{(-1)^{t+1}}{t!}M^tL^{t+1}u=0 \tag{9}$$

бўлади: иккинчи йиғиндида $t=s-1$ белгилаш киритилган, биринчи йиғиндининг $s=m-1$ ҳади $L^mu=0$ туфайли нолга тенг, қолган ҳадлар эса ўзаро қисқаради. $L^j u$ ҳам (4) тенгламани қаноатлантиргани учун $h_j=1/j!TL^ju\in\ker L$ бўлади ва бу (8) формуланинг ўзидир. Энди тиклаш айниятини текширамиз:

$$\sum_{j=0}^{m-1}\frac{M^j}{j!}TL^ju=\sum_{N\geq 0}\frac{M^NL^Nu}{N!}\sum_{j+s=N}\binom{N}{j}(-1)^s=u \tag{10}$$

чунки ички йиғинди $(1-1)^N$ га тенг ва у фақат $N=0$ да нолдан фарқли. Ягоналикни исботлаш учун $\Sigma_{j<m}M^jh_j=0$ ва $h_j\in\ker L$ деб фараз қиламиз. Бу тенгликка L^{m-1} ни қўллаб, (6) га кўра $(m-1)!\,h_{m-1}=0$ ни оламиз; кейин L^{m-2} ни қўллаб $h_{m-2}=0$ ни ва ҳоказо.

Изоҳ. (8) формуладаги T оператор (4) тенглама ечимлари фазосида $\ker L$ га проектордир: $h\in\ker L$ бўлса, $s\geq 1$ да $L^sh=0$ бўлгани учун $Th=h$; иккинчи томондан, исботда кўрсатилганидек $Tu\in\ker L$. Демак $T^2=T$ ва $h_0=Tu$ компонент u нинг $\ker L$ даги «бош қисми» ҳисобланади.

2026-yil, oktabr.
№10-son.
ISSN: 3060-5245

Муҳим мисолларни 1-жадвалда умумлаштирамиз.

1-жадвал

Вейль жуфтликлари ва уларга мос ёйилмалар

L	*M*	*LM-ML*	**(7) ёйилманинг маъноси**
d/*dx*	*x*	*I*	даражаси *m* дан кичик кўпҳадлар учун Тейлор формуласи
∂/partial$\bar{z}$	$\bar{z}$	*I*	полианалитик функциялар учун Балк ёйилмаси [4]
∂/*∂ z*	*z*	*I*	$\bar{z}$ бўйича антиголоморф компонентлар орқали ёйилма
Δ (Лаплас)	$\|x\|^2$	*I* эмас	Вейль жуфтлиги эмас; Альманси ёйилмаси бошқа формула билан [2; 3; 6]

Манба: муаллиф томонидан тузилган.

1-натижа. *L=∂*/partial$\bar{z}$, *M=*$\bar{z}$ *бўлганда 1-теоремадан полианалитик функциялар учун маълум*

$$\frac{\partial^m u}{\partial \bar{z}^m}=0 \Longrightarrow u(z)=\sum_{j=0}^{m-1}\bar{z}^j h_j(z), \qquad \frac{\partial h_j}{\partial \bar{z}}=0 \tag{11}$$

ёйилма келиб чиқади ва h_j *функциялар (8) формула билан ошкор ифодаланади.*

Энди асосий натижага ўтамиз. $D\subset\mathbb{C}$ соҳа, $r>0$ ва $u\in C^\infty(D\times\Delta_r)$ функция қуйидаги шартларни қаноатлантирсин: ҳар бир $z\in D$ учун $u(z,\cdot)$ функция Δ_r да голоморф ва $\partial^m u/$partial$\bar{w}^m=0$.

2-теорема (умумлаштирилган Хартогс ёйилмаси). *Юқоридаги шартларда шундай* a_{jk} *функциялар мавжудки, улар D да голоморф ва*

$$u(z,w)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{m-1}\bar{z}^j a_{jk}(z)\right)w^k \tag{12}$$

тенглик ўринли; бунда голоморф компонентлар бўйича қатор $D\times\Delta_r$ *нинг компакт қисм тўпламларида абсолют ва текис яқинлашади.*

Исбот. Ҳар бир тайинланган *w* учун 1-теоремани *L=∂*/partial$\bar{z}$, *M=*$\bar{z}$ жуфтликка қўллаб, $u=\Sigma_{j<m}\bar{z}^j H_j$ ёйилмани оламиз, бунда H_j функциялар (8) формула билан аниқланади. *L* ва *M* операторлар *∂*/partial$\bar{w}$ оператор билан коммутация қилгани ва *∂ u*/partial$\bar{w}$=0 бўлгани учун *∂* H_j/partial$\bar{w}$=0 бўлади. Демак, H_j функция *z* бўйича ҳам, *w* бўйича ҳам голоморф. Хартогснинг алоҳида голоморфлик ҳақидаги теоремасига кўра [1; 14] H_j функция $D\times\Delta_r$ да биргаликда голоморф. Уни *w* бўйича классик Хартогс қаторига ёйиб, $H_j(z,w)=\Sigma_k\ a_{jk}(z)w^k$ ни оламиз; қатор $D\times\Delta_r$ нинг компактларида текис яқинлашади. Бу ёйилмаларни $\bar{z}^j$ га кўпайтириб қўшсак, (12) ҳосил бўлади.

Энди яқинлашиш соҳасини тавсифлаймиз. Қуйидаги функцияни киритамиз:

$$v(z)=\limsup_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\max_{0\le j\le m-1}|a_{jk}(z)| \tag{13}$$

3-теорема (яқинлашиш соҳаси). *2-теорема шартлари бажарилсин. У ҳолда: а)* v^* *функция D да субгармоник ёки айнан -∞ га тенг; б) голоморф компонентлар бўйича (12) қатор*

$$G_u=\{(z,w)\in D\times\mathbb{C}:\ \log|w|+v^*(z)<0\} \tag{14}$$

2026-yil, oktabr.
№10-son.
ISSN: 3060-5245

тўпламнинг компакт қисм тўпламларида абсолют ва текис яқинлашади, $\log|w|+v(z)>0$ *бўлган нуқталарда эса компонентлар қатори узоқлашади; в)* G_u *– псевдоботиқ Хартогс соҳаси; г) и функция* G_u *га z бўйича m-тартибли полианалитик ва w бўйича голоморф функция сифатида ягона усулда давом эттирилади; д)* G_u *шундай хоссага эга бўлган энг катта тўлиқ Хартогс соҳасидир.*

Исбот. а) Ҳар бир a_{jk} голоморф бўлгани учун $1/k\log|a_{jk}|$ ва чекли сондаги бундай функцияларнинг максимуми субгармоникдир. H_j функцияларга $K\times\mathrm{bar}\Delta_{r'}$ ($K\subset D$ компакт, $r'<r$) тўпламда Коши баҳоларини қўлласак, $|a_{jk}(z)|\le C_K r'^{-k}$ ни оламиз. Демак, $1/k\log\max_j|a_{jk}|$ кетма-кетлик K да юқоридан текис чегараланган ва Хартогс–Лелон леммасига кўра [10; 11] унинг юқори лимитининг регуляризацияси v^* субгармоникдир. б) Бу тасдиқ $\max_j$ ни олиш чекли амал бўлгани сабабли ҳар бир компонентга классик Хартогс леммасини қўллашдан келиб чиқади: $K\times\mathrm{bar}\Delta_\rho\subset G_u$ компакт учун Хартогс леммасига кўра етарлича катта k ларда $\max_j|a_{jk}(z)|\rho^k\le e^{-\varepsilon k}$ бўлади. Узоқлашиш эса қатор умумий ҳадининг нолга интилмаслигидан келиб чиқади. в) $\log|w|+v^*(z)$ функция $D\times\mathbb{C}$ да плюрисубгармоник бўлгани учун унинг манфий қийматлар тўплами псевдоботиқдир [10]. г) Ҳар бир H_j нинг Хартогс қатори G_u да яқинлашгани учун у голоморф давом эттирилади; tilde $u=\Sigma_j\bar{z}^{\,j}\mathrm{tilde}\ H_j$ изланган давомдир, ягоналиги эса ҳақиқий-аналитик функциялар учун ягоналик теоремасидан келиб чиқади. д) Агар барча H_j лар $\{|w|<\rho(z)\}$ соҳага голоморф давом эттирилса, уларнинг Хартогс қаторлари бу соҳада яқинлашади, демак $\rho\le e^{-v^*}$.

2-натижа. $v_j(z)=lim\ sup_k 1/k\log|a_{jk}(z)|$ *бўлсин. У ҳолда* $v^*=\max_j v_j^*$ *ва*

$$G_u=\bigcap_{j=0}^{m-1}G_{H_j},\qquad G_{H_j}=\{(z,w):\ \log|w|+v_j^*(z)<0\} \tag{15}$$

Ҳақиқатан, чекли сондаги кетма-кетликлар учун юқори лимит ва максимум ўрин алмашади, юқоридан регуляризация эса чекли максимум билан коммутация қилади. Шундай қилиб, умумлаштирилган Хартогс қаторининг яқинлашиш соҳаси унинг голоморф компонентлари яқинлашиш соҳаларининг кесишмасидир. Ушбу натижанинг умумий схемаси 1-расмда келтирилган.



1-расм. Натижаларнинг мантиқий схемаси

2026-yil, oktabr.
№10-son.
ISSN: 3060-5245

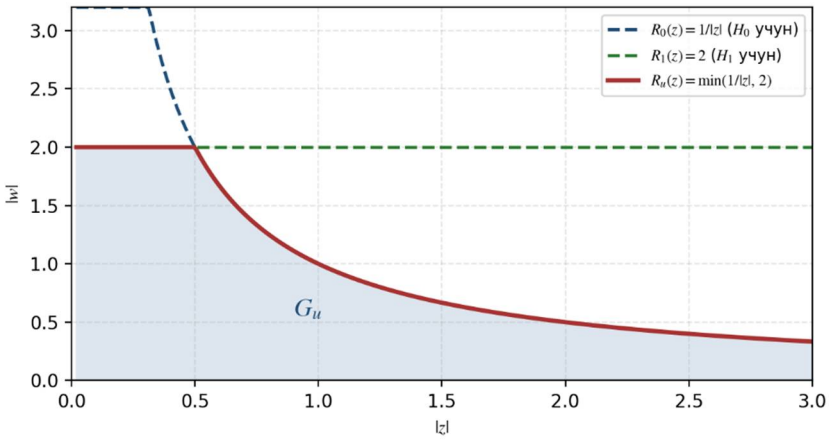
1-мисол. $D=\mathbb{C}$ ва

$$u(z,w)=\frac{1}{1-zw}+\frac{\bar{z}}{2-w} \quad (16)$$

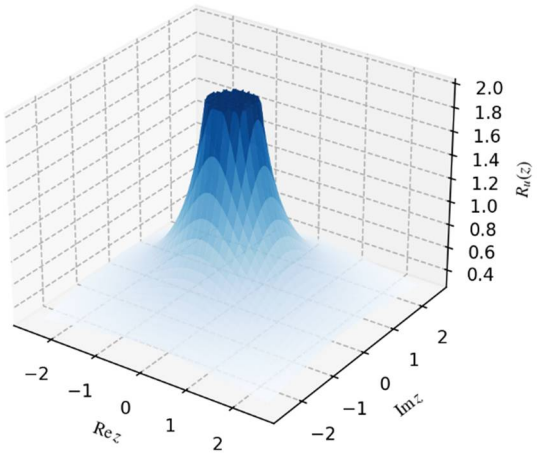
функцияни қараймиз. Бу функция z бўйича иккинчи тартибли полианалитик, чунки $H_0=1/(1-zw)$ ва $H_1=1/(2-w)$ функциялар голоморф. H_0 учун $a_{0k}(z)=z^k$, $v_0(z)=\log|z|$; H_1 учун $a_{1k}=2^{-k-1}$, $v_1\equiv-\log 2$. 2-натижага кўра

$$G_u=\left\{(z,w)\in\mathbb{C}^2:\ |w|<\min\left(\frac{1}{|z|},2\right)\right\} \quad (17)$$

Яқинлашиш радиусининг профили 2-расмда, соҳа чегарасининг сирти эса 3-расмда тасвирланган. $|z|<1/2$ бўлганда соҳани H_1 компонент, $|z|>1/2$ бўлганда эса H_0 компонент чегаралайди.



2-расм. Мисолдаги функция учун яқинлашиш радиусининг профили



3-расм. G_u Хартогс соҳаси чегарасининг сирти: $|w|=R_u(z)$

2-мисол. Учинчи тартибли $u=1/(1-zw)+\bar{z}\ e^w+\bar{z}^2/(3-w)$ функцияни қарасак, $a_{1k}=1/k!$ бўлгани учун $v_1\equiv-\infty$ бўлади ва бу компонент соҳани чекламайди. Натижада $G_u=\{|w|<\min(1/|z|,3)\}$ ҳосил бўлади. Бу мисол бутун функциядан иборат компонентлар яқинлашиш соҳасига таъсир қилмаслигини кўрсатади.

Олинган натижаларни кўп ўлчовли ҳолга ўтказиш мумкин.

2026-yil, oktabr.
№10-son.
ISSN: 3060-5245

4-теорема (кўп ўлчовли ҳол). *$D\subset\mathbb{C}^n$ соҳа ва $u\in C^\infty(D\times\Delta_r)$ функция w бўйича ҳамда $z_2,\dots,z_n$ ўзгарувчилар бўйича голоморф, $\partial^m u/\partial\bar z_1^m=0$ бўлсин. У ҳолда $u=\Sigma_{j<m}\bar z_1{}^j H_j$ бўлиб, H_j функциялар $D\times\Delta_r$ да голоморф; (13) формула билан аниқланган v^* функция D да плюрисубгармоник ва (14) кўринишдаги G_u соҳа псевдоботиқ Хартогс соҳасидир.*

Исбот. $L=\partial/\partial\bar z_1$, $M=\bar z_1$ операторлар Вейль жуфтлигини ҳосил қилади ва $\partial/\partial\bar z_i$ ($i\ge2$), $\partial/\partial\bar w$ операторлар билан коммутация қилади. Шу сабабли 1-теорема бўйича олинган H_j компонентлар барча ўзгарувчилар бўйича алоҳида голоморф бўлади ва Хартогс теоремасига кўра биргаликда голоморф. Қолган мулоҳазалар 3-теорема исботини такрорлайди; бунда бир ўзгарувчили субгармониклик ўрнига плюрисубгармониклик ва Хартогс леммасининг кўп ўлчовли шакли қўлланилади.

Шуни таъкидлаш керакки, 4-теоремада полианалитиклик фақат битта ўзгарувчи бўйича талаб қилинади. Агар u бир нечта $\bar z_i$ бўйича полианалитик бўлса, коммутацияланувчи Вейль жуфтликлари тизими ($\partial/\partial\bar z_i,\bar z_i$) учун 1-теоремани кетма-кет қўллаш орқали кўп индексли ёйилма $u=\Sigma_{|\alpha|}\bar z^\alpha H_\alpha$ ҳосил бўлади; бу ҳолда ҳам яқинлашиш соҳаси компонентлар соҳаларининг кесишмаси сифатида аниқланади.

Олинган натижаларнинг асосий хусусияти – яқинлашиш соҳасининг скаляр коэффициентлар орқали эмас, голоморф компонентлар орқали аниқланишидир. Бу танловнинг зарурлигини қуйидаги мисол кўрсатади: $u=(1-\bar z)/(1-w)$ функцияда $H_0=1/(1-w)$, $H_1=-1/(1-w)$ ва (14) га кўра $G_u=\mathbb{C}\times\Delta_1$. Бироқ $z=1$ нуқтада барча скаляр коэффициентлар $c_k(1)=0$ бўлиб, скаляр қатор ихтиёрий w да яқинлашади. Демак, скаляр яқинлашиш тўплами «юпқа» тўпламларда соҳадан катта бўлиши мумкин ва у псевдоботиқлик каби табиий геометрик хоссаларни сақламайди.

Голоморф компонентлар бўйича тавсиф эса бу камчиликдан холи: 3-теоремага кўра G_u ҳар доим псевдоботиқ ва у функциянинг табиий давом эттирилиш соҳаси билан устма-уст тушади. Бу эса классик Хартогс назариясининг асосий хоссаларини юқори тартибли тенгламалар ечимларига ўтказиш имконини беради.

Иккинчи муҳим жиҳат – 1-теореманинг абстракт характери. Исбот фақат (3) Вейль муносабатига таянади ва операторларнинг аниқ кўринишидан фойдаланмайди. Шу сабабли натижа ихтиёрий Вейль жуфтлиги учун ўринли. Лаплас оператори ва $|x|^2$ га кўпайтириш оператори Вейль жуфтлигини ҳосил қилмайди: уларнинг коммутатори $4\Sigma\, x_i\partial/\partial\, x_i+2n$ га тенг. Шунинг учун Альманси теоремаси бу схемага бевосита кирмайди ва уни ўхшаш усулда ўрганиш учун коммутаторни ҳисобга олувчи умумлашма талаб қилинади; бу масала В.В.Карачикнинг нормаланган системалар усули билан боғлиқ [6].

Учинчи жиҳат – натижаларнинг кўп ўлчовли ҳолга умумлаштирилиши. $z\in D\subset\mathbb{C}^n$ бўлганда $L=\partial/\partial\bar z_1$ операторини олиб, функциянинг бошқа ўзгарувчилар бўйича голоморфлигини талаб қилсак, 2- ва 3-

2026-yil, oktabr.
№10-son.
ISSN: 3060-5245

теоремаларнинг исботи ўзгаришсиз ўтади; бунда v^* функция плюрисубгармоник бўлади. Бир нечта $\bar{z}_i$ бўйича полианалитик функциялар учун эса кўп индексли ёйилма зарур бўлади.

Ниҳоят, олинган натижалар А.Садуллаев ва С.А.Имомқулов ишларида [13] ўрганилган давом эттириш масалалари билан табиий равишда боғланади: умумлаштирилган Хартогс қаторининг коэффициентлари ҳақидаги маълумот фақат баъзи кесимларда берилганда функцияни давом эттириш масаласини плюрисубгармоник ўлчовлар ёрдамида ҳал қилиш келгуси тадқиқотларнинг истиқболли йўналиши ҳисобланади.

2-жадвал

Классик ва умумлаштирилган Хартогс қаторларининг қиёси

Хосса	Классик Хартогс қатори	Умумлаштирилган қатор
Коэффициентлар	голоморф	m-тартибли полианалитик
$\log\|c_k\|$ субгармониклиги	бор	умуман йўқ
Яқинлашиш соҳаси	$\log\|w\|+v^*<0$	$\log\|w\|+\max_j v_j^*<0$
Псевдоботиқлик	бор [1]	бор (3-теорема)
Давом эттириш	голоморф	полианалитик-голоморф

Манба: муаллиф томонидан тузилган.

ХУЛОСА

Мақолада олинган натижаларга кўра, LM – ML = I муносабатини қаноатлантирувчи операторлар жуфтлиги учун $L^m u = 0$ тенгламасининг ҳар қандай ечими L нинг ядросидан олинган компонентлар орқали ошкор формула билан ягона усулда ёйилади. Бу натижа Тейлор формуласи ва полианалитик функциялар учун Балк ёйилмасини ягона схемада умумлаштиради.

Шу билан бирга, z бўйича полианалитик ва w бўйича голоморф функциялар коэффициентлари полианалитик бўлган умумлаштирилган Хартогс қаторларига ёйилиб, улардаги голоморф компонентлар биргаликда голоморф функцияларни ташкил этади. Коэффициентлари голоморф бўлмаган ҳолатда ҳам, умумлаштирилган Хартогс қаторининг яқинлашиш соҳаси псевдоботиқ бўлиб, компонентлар яқинлашиш соҳаларининг кесишмасидан иборат бўлади ҳамда голоморф компонентлар орқали тўлиқ тавсифланади. Яқинлашишни скаляр коэффициентлар орқали тавсифлаш юпқа тўпламларда нотўғри натижа бериши мумкинлиги сабабли, компонентлар бўйича тавсифлаш табиий ва ягона тўғри ёндашув ҳисобланади.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

1. Hartogs F. Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten // Math. Ann. – 1906. – Vol. 62. – P. 1–88.

2. Almansi E. Sull'integrazione dell'equazione differenziale $\Delta^{2n} = 0$ // Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 1899. – Ser. III, Vol. 2. – P. 1–51.

3. Aronszajn N., Creese T.M., Lipkin L.J. Polyharmonic Functions. – Oxford: Clarendon Press, 1983. – 265 p.

4. Balk M.B. Polyanalytic Functions. – Berlin: Akademie Verlag, 1991. – 197p.

5. Przeworska-Rolewicz D. Algebraic Analysis. – Dordrecht: D. Reidel; Warszawa: PWN, 1988. – 624 p.

6. Karachik V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications // J. Math. Anal. Appl. – 2003. – Vol. 287, No. 2. – P. 577–592.

7. Гельфонд А.О., Леонтьев А.Ф. Об одном обобщении ряда Фурье // Матем. сб. – 1951. – Т. 29(71), № 3. – С. 477–500.

8. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. 2. Функции нескольких переменных. – М.: Наука, 1985. – 464 с.

9. Владимиров В.С. Методы теории функций многих комплексных переменных. – М.: Наука, 1964. – 412 с.

10. Hörmander L. An Introduction to Complex Analysis in Several Variables. 3rd ed. – Amsterdam: North-Holland, 1990. – 254 p.

11. Klimek M. Pluripotential Theory. – Oxford: Clarendon Press, 1991. – 266p.

12. Садуллаев А. Плюрисубгармонические меры и емкости на комплексных многообразиях // Успехи матем. наук. – 1981. – Т. 36, вып. 4. – С. 53–105.

13. Садуллаев А., Имомкулов С.А. Продолжение голоморфных и плюригармонических функций с тонкими особенностями на параллельных сечениях // Труды МИАН. – 2006. – Т. 253. – С. 158–174.

14. Jarnicki M., Pflug P. Separately Analytic Functions. – Zürich: European Mathematical Society, 2011. – 296 p.

15. Ransford T. Potential Theory in the Complex Plane. – Cambridge: Cambridge University Press, 1995. – 232 p.

16. Садуллаев А. Плюрипотенциальная теория. Применения. – Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing, 2012. – 316 с.

2026-yil, oktabr. №10-son.

Mas’ul muharrir: Beglayev Uchqun
Musahhih: Boltayev Nurali
Sahifalovchi va dizaynerlar: Normurodov Sarvar,
Sharipov Shoxruh

© Materiallar ko‘chirib bosilganda “Agrobiznes, fan va texnologiyalar” ilmiy-amaliy elektron jurnali manba sifatida ko‘rsatilishi shart. Jurnalda bosilgan material va reklamalardagi dalillarning aniqligiga mualliflar mas’ul hisoblanadi. Tahririyat fikri har vaqt ham mualliflar fikriga mos kelavermasligi mumkin. Tahririyatga yuborilgan materiallar qaytarilmaydi.

Mazkur jurnalda maqolalar chop etish uchun quyidagi havolalarga murojaat qilish mumkin. Ilmiy maqolalar, reklama, hikoya va boshqa ilmiy-ijodiy materiallar yuborishingiz mumkin. Materiallar va reklamalar pullik asosda chop etiladi.

Elektron pochta: licht-1989@mail.ru
Jurnalning telegram manzili: t.me/agrobiznes_elektronjurnal
Telefon raqami: +998939018320, +998934393000
Jurnal rasmiy sayti: https://www.agrobiznesjournal.uz

“Agrobiznes, fan va texnologiyalar” ilmiy-amaliy elektron jurnali O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasi rayosatining 30.11.2024-yildagi №364/5-sonli qarori bilan 08.00.00-Iqtisodiyot fanlari bo‘yicha, 08.05.2025-yildagi №370/5-sonli qarori bilan 06.00.00-Qishloq xo‘jaligi fanlari bo‘yicha “Dissertatsiyalar asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan milliy ilmiy nashrlar ro‘yxati”ga kiritilgan.

“Agrobiznes, fan va texnologiyalar” ilmiy-amaliy elektron jurnali 2023-yil 23-maydan O‘zbekiston Respublikasi Prezidenti Administratsiyasi huzuridagi Axborot va ommaviy kommunikatsiyalar agentligi tomonidan **C-5669225** reyestr raqami tartibi bo‘yicha ro‘yxatdan o‘tkazilgan.
Litsenziya raqami: №083688

Manzilimiz: Toshkent viloyati, Qibray tumani, Universitet ko‘chasi, 2-uy